Géometrie : introduction (1)

L'objectif de ce chapitre est de faire une mise à niveau en géométrie plane et spatiale. On commencera par introduire les vecteurs, puis les différents systèmes de coordonnées et les outils de calcul que sont le produit scalaire, le produit vectoriel et les déterminants.

Plan

Vecteurs et points

En mathématiques, un vecteur peut désigner n'importe quelle catégorie d'objets qu'on peut additionner entre eux et multiplier par un nombre (c.f le futur chapitre Espaces vectoriels). Dans ce chapitre et les suivants, nous nous intéresserons uniquement à une catégorie de vecteurs particuliers : les vecteurs du plan et les vecteurs de l'espace en géométrie. De nombreuses notions introduites dans ce chapitre (vecteurs, bases....) seront approfondies lors du second semestre.

Dans cette section, on se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2 (le plan) ou 3 (l'espace). Les exemples seront évidemment tracés dans le plan.

Définition

Un vecteur du plan ou de l'espace est un objet mathématique caractérisé par :

- *sa direction (ou pente, ou ligne support)*
- *son sens (ou orientation)*
- *sa longueur (ou norme)*

On note les vecteurs par une lettre surmonté d'une flèche ($\vec{u}, \vec{b}$...). *On les représente graphiquement par une flèche.*
Le vecteur de longueur 0 est appelé le vecteur nul et il est noté $\vec{0}$. *Il n'a ni direction, ni sens fixés.*
On note E l'espace vectoriel, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs.

Remarque: Quelle est la différence entre $\mathcal{E}$ l'espace affine et E l'espace vectoriel ?

- L'espace affine $\mathcal{E}$ contient les points (notés par une lettre majuscule). C'est d'une certaines manière la ≪ feuille de papier ≫sur laquelle on dessine les points, les droites, les figures ...
- L'espace vectoriel E ne contient que les vecteurs. C'est un ≪ papier calque ≫sur lequel on trace les flèches. Ce papier calque et ces flèches sont déplaçables à volonté au-dessus de l'espace affine(tant qu'on ne modifie ni le sens ni la direction). N'oubliez jamais qu'un vecteur n'est pas figé !

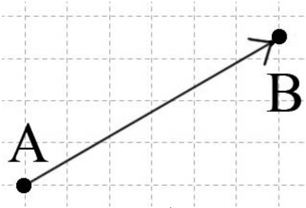
Puisqu'il suffit d'avoir une direction, un sens et une longueur pour faire un vecteur, on peut en créer à l'aide de deux points.

Définition

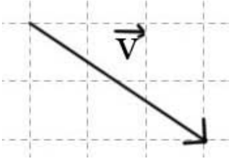
Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$. Le vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé de la manière suivante :

- *sa direction est celle de la droite (AB)*
- *son sens est du point A vers le point B*
- *sa longueur est la longueur du segment $[AB]$. On la note $\|\overrightarrow{AB}\|$.*

Exemples:



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par la direction qui fait un angle de 30° (sens trigonométrique) par rapport à l'horizontale, le sens "vers la droite" et la longueur 7 unités.



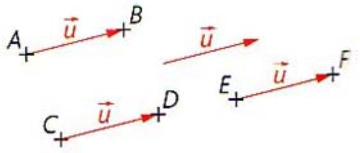
Le vecteurs $\vec{v}$ est caractérisé par la direction qui fait un angle de $-\arctan(2/3)$ (sens trigonométrique) par rapport à l'horizontale, le sens "vers la droite" et la longueur $\sqrt{13}$ unités.

Soit C un point de de $\mathcal{E}$. Le vecteur $\overrightarrow{CC}$ est le vecteur nul.

Proposition

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur.

Exemple: Sur la figure suivante, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sont plusieurs représentation graphique du même vecteur. Ils sont égaux : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On peut tracer une infinité de vecteurs identiques qui ont tous le même SENS, la même LONGUEUR et la même DIRECTION, c'est le **même** vecteur.



Opérations sur les vecteurs

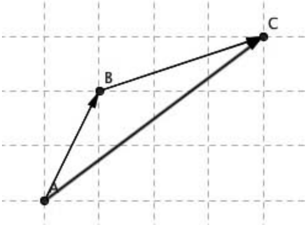
On peut faire deux opérations sur les vecteurs : les additionner par la relation de Chasles ou les multiplier par un nombre réel.

Définition

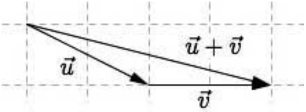
La somme de deux vecteurs est un vecteur qu'on peut déterminer au moyen de la relation de Chasles ou de la règle du parallélogramme.

Relation de Chasles : soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}$. On a

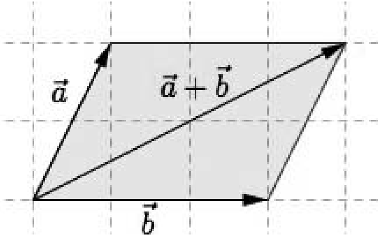
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



ça marche aussi sans les points, pour additionner graphiquement deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Règle du parallèlogramme : Soient $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs. Le vecteur $\vec{a} + \vec{b}$ est une des diagonale du parallèlogramme formé grâce aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul, le vecteur $k\vec{u}$ est caractérisé par :

- *La même direction que $\vec{u}$,*
- *Le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et le sens contraire si $k < 0$*
- *la longueur $|k|.\|\vec{u}\|$*

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, k et l deux réels. On a alors les règles de calcul suivantes :

- $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$

Remarque: Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$. Il a même direction, même longueur mais le sens opposé. C'est-à-dire $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Proposition

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si (équivalence) $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$. Autrement dit, le produit d'un nombre et d'un vecteur est nul si et seulement si le nombre ou le vecteur est nul.

Plan

Coordonnées cartésiennes. Vecteurs colinéaires et vecteurs coplanaires

Dans cette section, on va introduire la notion de base, qui ne concerne que les vecteurs. A différencier des repères dans lesquels apparaissent les points.

Définition

Soient $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ des vecteurs, $c_1, \ldots c_n$ des réels. On appelle combinaison linéaire de $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ le vecteur $\vec{u}$ défini par :

$$\vec{u} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \cdots + c_n\vec{v_n}$$

Les nombres $c_1, \ldots, c_n$) sont les composantes du vecteur $\vec{u}$ par rapport aux vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$.

La combinaison linéaire d'un seul vecteur est un vecteur colinéaire :

Définition

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** *si, et seulement si, l'un des deux est nul ou s'il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.*

Remarque: Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs. C'est le seul vecteur ayant cette propriété dans le plan ou l'espace.

Définition

Soient $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs non nuls. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ sont coplanaires si, et seulement si, les droites $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ passant par un même point A et ayant pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ appartiennent à un même plan.

Remarque:

1. Deux vecteurs sont toujours coplanaires.
2. Trois vecteurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe trois nombres réels a, b et c qui ne sont pas tous nuls et tels que
$$a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath} + c\,\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}.$$
Ainsi, si $c \neq 0$, alors $\overrightarrow{k} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{\imath} - \frac{b}{c}\overrightarrow{\jmath}$, c'est-à-dire que trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si l'un au moins de ces vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des deux autres.
3. Quand on travaille dans le plan, tous les vecteurs sont évidemment coplanaires. Cette notion n'est utile que dans l'espace.

Bases du plan et coordonnées cartésiennes

Définition

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan. On dit que le couple de vecteurs non nuls $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan vectoriel si, et seulement si, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires. Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan vectoriel est dite :

- **normée** *si les vecteurs* $\overrightarrow{\imath}$ *et* $\overrightarrow{\jmath}$ *sont de norme* 1.
- **directe** *(respectivement indirecte) si une mesure de l'angle orienté* $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ *appartient à* $]0, \pi[$ *(respectivement à* $]-\pi, 0[$*).*
- **orthogonale** *si une mesure de l'angle orienté* $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ *est égale à* $\pi/2$ *ou* $-\pi/2$.
- **orthonormale** *si elle est normée et orthogonale. Elle peut être directe ou indirecte. En abrégé, on notera b.o.n.d. pour ≪base orthonormale directe≫.*

Remarque: Pour ne pas avoir de problème avec la notion de coordonnées, il ne faut pas confondre la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et la base $(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\imath})$. Si l'une est directe, l'autre est indirecte.

Proposition

Si $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ *est une base du plan vectoriel, alors pour tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *de ce plan, il existe un unique couple de nombres réels* (x, y) *tel que*

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}.$$

Ce couple (x, y) *constitue les* **coordonnées** *ou* **composantes** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$*. On note* $\overrightarrow{u}(x, y)$*. Une base permet de « repérer » les vecteurs.*

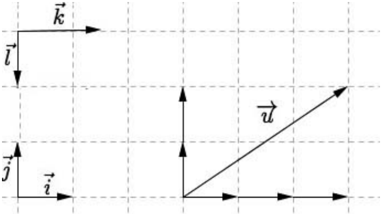
On a déjà défini les composantes d'un vecteur sur une famille de vecteurs. Les coordonnées sont des composantes dans une **base**.

Exemple: Le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(3, 2)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

Par contre, dans la base $(\vec{k}, \vec{l})$, $\vec{u}$ a pour coordonnée $(2, -2)$ car

$$\vec{u} = 2\vec{k} - 2\vec{l}$$



Bases dans l'espace et coordonnées cartésiennes

Définition

On appelle base de l'espace (vectoriel) tout triplet $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ *de vecteurs non coplanaires.*

Remarque: Si $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est une base de l'espace, les vecteurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ sont nécessairement non nuls.

Définition

Une base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ *de* E *est dite orthonormale si, et seulement si,*

$$\|\overrightarrow{\imath}\| = \|\overrightarrow{\jmath}\| = \|\overrightarrow{k}\| = 1 \qquad \textit{et} \qquad \overrightarrow{\imath} \perp \overrightarrow{\jmath}, \quad \overrightarrow{\imath} \perp \overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\jmath} \perp \overrightarrow{k}.$$

Convention : On dira qu'une base orthonormale $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est directe si l'un des critères équivalents suivant est vérifié :

- lorsque l'on tourne un tournevis dans le sens de $\overrightarrow{\imath}$ vers $\overrightarrow{\jmath}$, on enfonce la vis sur la direction $\overrightarrow{k}$.
- Quand les deux vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ sont « à plat »et forment un ange droit dans le sens positif, le vecteur $\vec{k}$ pointe vers « le haut ».
- (règle de la main droite) Si on met le premier vecteur sur le pouce et le deuxième vecteur sur l'index, alors le troisième vecteur est le majeur.

Dans le cas contraire, la base est dit indirecte ou rétrograde.

Dans une base orthonormale directe, le vecteur $\vec{k}$ indique quel est le sens positif de lecture de tous les angles de vecteurs situés dans le plan engendré par $(\vec{i}, \vec{j})$. On dit que le vecteur $\vec{k}$ **oriente le plan** engendré par $(\vec{i}, \vec{j})$. On peut de la même manière orienter n'importe quel plan de l'espace.

Définition

Orienter un plan $\mathcal{P}$ de l'espace, c'est se donner un vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{k}$ d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

Définition

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ *une base de l'espace vectoriel* E*. Pour tout vecteur* $\overrightarrow{u} \in E$*, il existe un unique triplet de nombres réels* (x, y, z) *tel que*

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}.$$

Les nombres x*,* y *et* z *sont appelés les coordonnées cartésiennes du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $\mathcal{B}$*.*

Notation matricielle : les vecteurs colonnes

La notation de coordonnées en ligne comme (x, y) ou (x, y, z) est pratique et gagne de la place. Pour la suite, les coordonnées des points seront aussi notées en ligne, ce qui peut provoquer des confusions. D'autre part, on peut faire des opérations sur les vecteurs (mais pas sur les points !), ce qui se répercute sur les coordonnées. On a besoin d'une notation plus efficace pour les vecteurs : la notation matricielle.

Une matrice est un tableau de nombre (sans traits de démarcation) entouré par deux grandes parenthèses. Pour identifier un vecteur, on aura besoin d'une seule colonne, et de 2 ou 3 ligne (plan ou espace).

Définition

Un vecteur $\vec{u}$ du plan de coordonnées (x, y) dans une base du plan correspond au vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (matrice avec une seule colonne).
Pour parler du vecteur $\vec{u}$, on pourra utiliser n'importe laquelle des notations suivantes :

$$\vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Définition

Un vecteur $\vec{u}$ de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans une base de l'espace correspond au vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Pour parler du vecteur $\vec{u}$, on pourra utiliser n'importe laquelle des notations suivantes :

$$\vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Remarque: La seule différence entre le plan et l'espace se trouve dans le nombre de ligne du vecteur colonne. Par la suite, ce cours donnera la majorité des définitions **dans l'espace**. Pour avoir la même définition dans le plan, il suffira de faire disparaitre la troisième ligne et tout ce qui concerne la coordonnée ≪ z ≫.

Le premier avantage de la notation matricielle est la facilité avec laquelle on peut faire des opérations sur les vecteurs : addition, translation, rotation..... Cette notation sera aussi beaucoup employée en génie civil.

Proposition

Soit $\mathcal{B}$ une base de l'espace (vectoriel). Soient λ et μ deux nombres réels. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

Proposition

Le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

Ce qui se résume en une seule opération par

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$$

Plan

Coordonnées cartésiennes de points

Les définitions et propriétés sur les points vont découler des définitions et propriétés de la section précédentes sur les vecteurs. On se placera majoritairement dans $\mathcal{E}$ l'espace affine de dimension 3 (et E l'espace vectoriel associé). La plupart des notions introduites ici sont naturellement aussi valables dans le plan, avec une coordonnée en moins.

Repères

Définition

On appelle **repère cartésien** *de l'espace affine tout quadruplet* $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *où* O *est un point de l'espace, appelé* **origine** *du repère, et* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *une base des vecteurs de l'espace vectoriel* E.
Les droites passant par O *de vecteurs directeurs respectifs* $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ *et* $\vec{k}$ *sont appelées* **axes** *du repère, et notées* (Ox), (Oy) *et* (Oz).

Définition

Un **repère cartésien** $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{j})$ *du plan est la donnée d'un point* O*, appelé* **origine du repère***, et d'une base* $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ *du plan vectoriel. Les droites passant par* O *de vecteurs directeurs respectifs* $\overrightarrow{\imath}$ *et* $\overrightarrow{\jmath}$ *sont appelées les* **axes du repère***, et notées* (Ox) *et* (Oy)*.*

Notation: Le repère est qualifiée de normé, orthogonal, orthonormal, direct ou indirect selon que la base est normée, orthogonale, orthonormale, directe ou indirecte. En abrégé, on notera *r.o.n.d* pour ≪repère orthonormal direct≫.

Coordonnées cartésiennes de points

Proposition

(coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace) Soit $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ *un repère de l'espace. Pour tout point* M *de l'espace, il existe un unique triplet de nombres réels* (x, y, z) *tel que*

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les nombres x, y *et* z *sont appelés coordonnées cartésiennes du point* M *dans le repère* $\mathcal{R}$. *Le nombre réel* x *est l'abscisse du point* M, y *son ordonnée et* z *sa cote (ou hauteur).*

De même dans le plan, avec seulement deux coordonnées (abscisse et ordonnée).

Corollaire

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace. On note $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base associée à $\mathcal{R}$.

Si A et B deux points de l'espace de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans le repère $\mathcal{R}$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Remarque: Calculer les coordonnées d'un vecteur avec celles des points marche aussi dans le plan....

Exercice 1

Soit $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan $\mathcal{P}$ et les trois points $A(2, -3)$, $B(4, -1)$ et $C(-2, 1)$. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

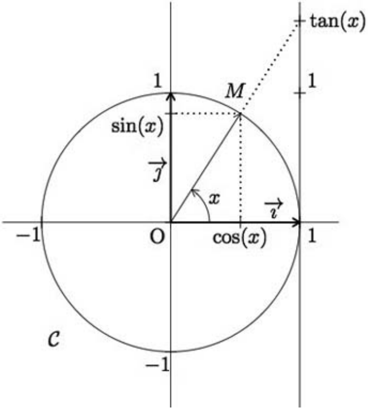
Plan

Cosinus, Sinus et Tangente

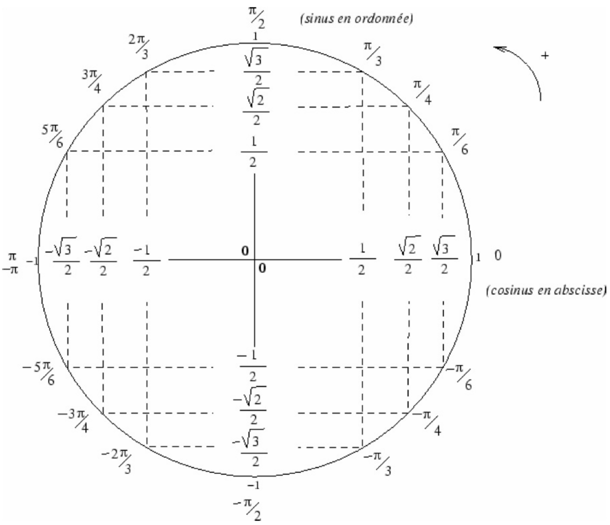
Définition

Le plan orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$*, on considère le cercle* $\mathcal{C}$ *de centre* O *et de rayon* 1*.*
Pour tout nombre réel x*, le point* M *de* $\mathcal{C}$ *tel que l'angle orienté* $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ *ait pour mesure* x*, a pour coordonnées* $(\cos x, \sin x)$*.*
Leur quotient est la tangente :

$$\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$


tan(x)
1
M
sin(x)
$\vec{j}$
x
$\vec{i}$
−1
O
cos(x)
1
$\mathcal{C}$
−1

Les principales valeurs d'angles, sinus et cosinus à savoir sont les suivantes



Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Réciproquement, si a, b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos x$ et $b = \sin x$.

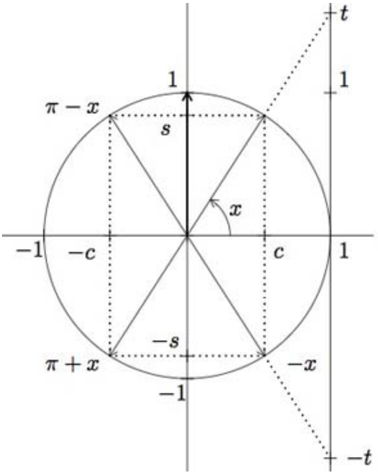
Un grand nombre de formules et résultats concernant les fonctions trigonométriques peuvent se retrouver en traçant et observant les angles dans un cercle trigonométrique.

Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x), & \sin(-x) &= -\sin(x), \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \cos(\pi + x) &= -\cos(x), & \sin(\pi + x) &= -\sin(x). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$, on a :

$$\tan(-x) = -\tan(x), \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x), \quad \tan(\pi + x) = \tan(x).$$


t
1
1
$\pi - x$
s
x
-1
$-c$
c
1
$-s$
$\pi + x$
$-x$
-1
$-t$

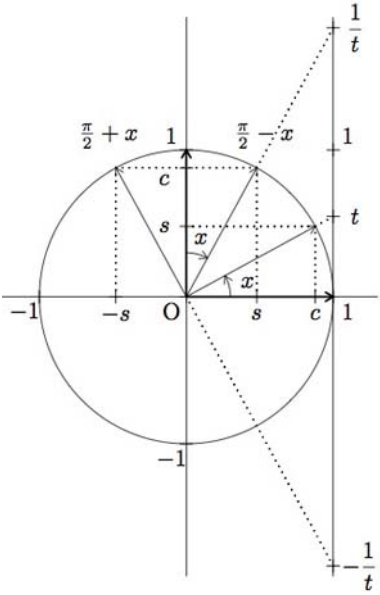
Pour tout réel x, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x).$$

Pour tout réel x non multiple de $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}.$$


$\frac{1}{t}$
$\frac{\pi}{2}+x$
1
$\frac{\pi}{2}-x$
1
c
t
s
x
x
-1
$-s$
O
s
c
1
-1
$-\frac{1}{t}$

Les formules à savoir !

• Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a, \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

• En prenant a=b dans les formules précédents, on obtient les formules des angles doubles

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a, \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

• Pour $x \neq \pi[2\pi]$, on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors les formules de l'angle moitié

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Il faut savoir qu'elles existent

- Sous réserve d'existence des tangentes, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Ces formules se retrouvent grâce à $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$,.... en factorisant le quotient dans la tangente.

- Pour $p, q \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

$$\cos p - \cos q = 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

On retrouve toutes ces formules grâce aux formules de la section précédente avec $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$.

- Les multiplications de cosinus et sinus

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y)+\sin(x+y)\right].$$

Ces formules se retrouvent soit avec les formules de la section précédente, soit par linéarisation (c.f Nombres Complexes).

Plan

Produit scalaire

On doit commencer par la définition dans le plan avant de passer à la définition dans l'espace.

Définition

On appelle **produit scalaire** *de deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *du plan le nombre réel, noté* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, *défini par*

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ *si l'un des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *est nul,*
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *sinon.*

Remarque: Le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par lui-même est appelé carré scalaire de $\overrightarrow{u}$ (noté $\overrightarrow{u}^2$). On a $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2$. En particulier, si A et B sont deux points du plan, on a $\left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = AB^2$.

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace vectoriel E. Il existe plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ qui contient les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarque: Comme précédemment, les propriétés du produit scalaire seront énoncées dans l'espace, tout en sachant qu'elle sont vraies dans le plan. En effet, comme le montre cette définition, le produit scalaire de l'espace est exactement le produit scalaire du plan. Le tout étant de se placer dans le bon plan $\mathcal{P}$.

Propriétés du produit scalaire

Proposition

Le produit scalaire est bilinéaire et symétrique. Cela signifie que si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs et λ, μ deux nombres réels, on a :

(i) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ *(symétrie).*

(ii) $(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \mu \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$ *(linéarité)*

(iii) $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{w}) = \lambda \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ *(linéarité).*

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On a :

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \qquad \textit{si, et seulement si,} \qquad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Démonstration.

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ qui oriente la droite $\mathcal{D}$.
Soit A et B deux points de $\mathcal{D}$. On appelle **mesure algébrique** *de (A, B) et l'on note $\overline{AB}$ le réel :*

$$\overline{AB} = \begin{cases} 0 \quad si\ A = B \\ AB \quad\quad si\ les\ vecteurs\ \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{u}\ sont\ dans\ le\ même\ sens \\ -AB\ si\ les\ vecteurs\ \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{u}\ sont\ de\ sens\ contraire \end{cases}$$

Proposition

Soit A, B, C trois points du plan avec $A \neq B$ et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Si l'on oriente la droite (AB), on a

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}.$$

Expression dans une base orthonormale

L'expression du produit scalaire est particulièrement simple dans une base orthonormale, qu'elle soit directe ou indirecte. L'orientation de la base n'influence que l'orientation des angles et donc pas le produit scalaire.

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ *une base orthonormale de l'espace et* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs de coordonnées cartésiennes respectives* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *dans* $\mathcal{B}$.

On a

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Démonstration.

Commençons par calculer les produits scalaires des vecteurs de la base. Le vecteur $\vec{i}$ est de norme 1 et il fait un angle 0 avec lui-même donc $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$. De même $\vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$. Les vecteurs de la bases étant orthogonaux deux à deux, on a $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

Revenons au produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. On décompose à l'aide des coordonnées $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{\imath} + y'\overrightarrow{\jmath} + z'\overrightarrow{k}$. Puis on développe le produit scalaire par bilinéarité :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left(x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}\right) \cdot \left(x'\overrightarrow{\imath} + y'\overrightarrow{\jmath} + z'\overrightarrow{k}\right) = \dots$$

A vos crayons !

Corollaire

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans une base orthonormale. Alors

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Soit A et B deux points de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans un repère orthonormal. On a

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Les coordonnées peuvent servir à calculer le produit scalaire. Inversement, le produit scalaire peut servir à calculer les coordonnées dans une b.o.n.

Proposition

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *une base orthonormée de l'espace. Pour tout vecteur* $\vec{u}$ *de l'espace, on peut écrire :*

$$\vec{u} = \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{\imath})}_{\text{prod. scalaire}}\ \vec{\imath} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{\jmath})}_{\text{prod. scalaire}}\ \vec{\jmath} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{k})}_{\text{prod. scalaire}}\ \vec{k} = \begin{pmatrix} \vec{u}\cdot\vec{\imath} \\ \vec{u}\cdot\vec{\jmath} \\ \vec{u}\cdot\vec{k} \end{pmatrix}.$$

Remarque: Tout ce qui précède marche toujours dans le plan, avec deux coordonnées seulement. On enlève juste $z, z', z_B, z_A, \vec{k}$.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ des vecteurs.

1. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Que peut-on dire en déduire ?
2. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{w}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{w}\|$ et en déduire les mesures possibles de l'angle $(\vec{u}, \vec{w})$.