Notations mathématiques et rédaction

Plan

En mathématiques, les concepts sont aussi importants que les calculs. Dans votre futur profession, des moyens informatiques se chargeront de la partie calcul, mais c'est vous qui devrez choisir quel calcul faire et par quelle méthode. Puis vous devrez interpréter les résultats, les expliquer à d'autres et justifier vos choix. Ce qui veut dire que vous devez comprendre ce que vous faites et pourquoi vous le faites (raisonner).

Les objectifs principaux de l'année ATS sont : acquérir/renforcer des connaissances, maîtriser les outils de calculs et savoir mener des raisonnements. Pour vérifier si ces objectifs sont atteints, il y aura des évaluations orales (colles) et écrites (DS). En particulier à l'écrit, on vous demandera de « bien rédiger » vos réponses.

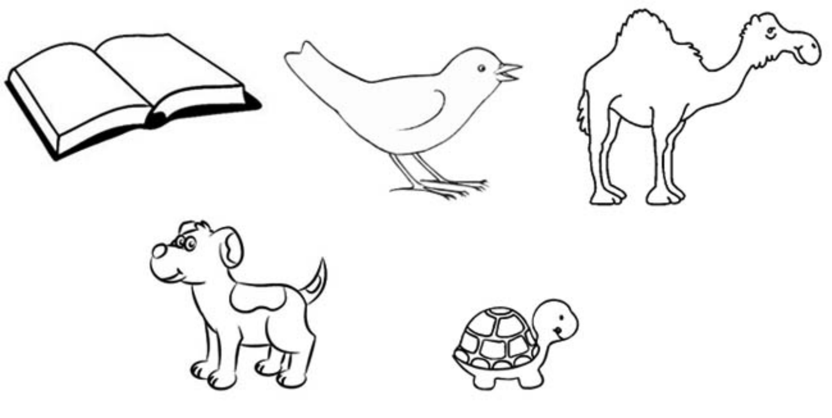
« Bien rédiger » signifie exposer clairement sa pensée, et sans aucune ambiguïté pour le lecteur. Pourquoi est-ce important de bien rédiger ?

Définition

Un dromadaire est animal qui a quatre pattes et une bosse.

Exercice 1

Déterminer parmi les objets suivants quels sont les dromadaire. Justifier votre réponse.



Question 1. Montrer que f est une application linéaire.

$$f(\lambda x{+}\mu x', \lambda y{+}\mu y') = \big(a(\lambda x + \mu x') + b(\lambda y + \mu y'), c(\lambda x + \mu x') + d(\lambda y + \mu$$

$$= \big(a\lambda x + a\mu x' + b\lambda y + b\mu y', c\lambda x + c\mu x' + d\lambda y + d\mu y'\big)$$

$$\lambda f(x,y) + \mu f(x',y') = \lambda(ax + by, cx + dy) + \mu(ax' + by', cx' + dy')$$

$$= \big(a\lambda x + b\lambda y + a\mu x' + b\mu y', c\lambda x + d\lambda y + c\mu x' + d\mu y'\big)$$

Donc la réponse est 42.

Pour « Bien rédiger » , il faut suivre des règles et utiliser des notations communément admises.

Plan

Apprenons à déchiffrer les hiéroglyphes :

$$\forall x \in [0,1], x \geqslant 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$$

Dans cette expression mathématiques, on trouve :

- des lettres x, y, appelés aussi variables.
- des virgules et des flèches, qui servent à séparer les différentes parties de la phrase (car c'est une phrase !)
- Des parties commençant par un quantificateurs $\forall$ et $\exists$ et des parties sans quantificateurs.
- Des ensembles $[0,1]$, $\mathbb{R}$
- des symboles divers $\in$, $=$, $\geqslant$, ^{2}.

Chacun de ses éléments a une signification précise.

Les variables

Une variable est une lettre (ou un symbole, un mot) qui sert à représenter un objet. Elle permet d'écrire des calculs et des raisonnements de manière lisible et condensée. Par habitude, x est un nombre et f une fonction. Mais c'est juste une habitude, et on peut très bien avoir x une fonction (c.f futur cours sur les courbes parametrées). Pour éviter les confusions, il faut donc préciser quel rôle a chaque lettre utilisée. Il faut « introduire les notations ».

Quand on veut introduire une variable représentant un élément *quelconque* d'un ensemble, on utilise « soit ». Par exemple, si l'on considère un réel quelconque x, on l'introduit de la manière suivante :

$$\text{« Soit } x \in \mathbb{R}. \text{ »}$$

Cela signifie qu'on peut mettre TOUT les réels à la place de x dans toute la suite. On peut aussi utiliser l'expression « Pour tout $x \in \mathbb{R}$. »

Cette phrase introductive est le début type de la réponse à une question de la forme : ≪ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \dots$ ≫. Quand on ne sait pas comment démarrer une question, commencer par introduire les variables et les notations (et la conclusion qu'on aimerait trouver) permet en général de voir apparaître le moyen d'y arriver.

Exemple: Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sqrt{2}}$.

Et quand on veut introduire une variable représentant un élément *spécial* d'un ensemble, on utilise encore ≪ soit ≫. Mais on précise juste après quelle est la propriété spéciale vérifiée par cet élément en utilisant ≪ tel que ... ≫, ≪ vérifiant .... ≫ ou tout autre expression.

Exemple: Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant 1$.

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Les quantificateurs sont des symboles utilisés pour déclarer des variables dans une propriété en symboles mathématiques. Attention, il faut éviter d'utiliser les quantificateurs (et toute autre forme d'abréviations) dans une phrase en français quand on rédige sa copie.
Une phrase avec un (ou plusieurs) quantificateur doit se comprendre de la manière suivante

$$\boxed{\text{quantificateur}}\ \boxed{\text{la variable et l'ensemble d'appartenance}}\ \boxed{,}\ \boxed{\text{la propriété vérifiée par la variable}}$$

Définition

Lorsqu'une propriété dépendant de x est vraie pour TOUT x appartenant à un ensemble E, on utilise le quantificateur $\forall$, qui se lit « pour tout » ou « quel que soit », en écrivant

$$\forall x \in E, \ \textit{la propriété}$$

.

Exemple: « Le carré de tout nombre réel est positif » se traduit par la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 \geqslant 0.$$

« La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante » signifie « pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \geqslant u_n$ » et se traduit par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Définition

Lorsqu'une propriété dépendant de x est vraie pour AU MOINS UN élément x appartenant à un ensemble E, on utilise le quantificateur $\exists$, qui se lit « il existe » en écrivant

$$\exists x \in E, \;\; \textit{la propriété}$$

Exemple: L'énoncé : « on peut trouver un nombre entier dont le carré est 9 » signifie « il existe un nombre entier dont le carré est 9 » et se traduit par la formule

$$\exists n \in \mathbb{Z}, \;\; n^2 = 9.$$

L'énoncé : « Tout nombre réel positif possède une racine carrée. » signifie : « Pour tout $x \geqslant 0$, il existe un nombre réel y vérifiant : $y^2 = x$. » et se traduit par la formule : $\forall x \geqslant 0, \, \exists y \in \mathbb{R}, \, y^2 = x$.

Notation bonus : on utilise souvent la notation $\exists! x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ pour signifier que l'énoncé $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour exactement un seul et unique x appartenant à E. On lit alors :
$\ll$ il existe un unique élément x dans E tel que $\mathcal{P}\,(x)$ est vrai $\gg$.

Les doubles flèches $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$

Le symbole $\Longrightarrow$ est le symbole d'implication. Si A et B désignent deux assertions, la notation $A \Longrightarrow B$ se lit ≪ A implique B ≫ et signifie que **SI** A est vraie **ALORS** B est vraie.

Attention : L'ordre d'écriture est important : lorsque l'on a $A \Longrightarrow B$, l'implication réciproque $B \Longrightarrow A$ n'est pas nécessairement vraie. Le symbole $\Longrightarrow$ ne s'utilise jamais dans une rédaction. Utilisez les expressions françaises (donc, par conséquent, on en déduit que, il vient que....)

Le symbole $\iff$ est le symbole d'équivalence. Si A et B désignent deux assertions, la notation $A \iff B$ se lit « A est équivalent à B » et signifie que si A est vraie alors B est vraie **ET** si B est vrai alors A est vrai. Deux assertions équivalentes sont donc simultanément vraies ou fausses. L'ordre d'écriture n'a pas d'importance car si A est équivalent à B alors B est équivalent à A.

Dans une phrase en français, on utilisera la locution « si, et seulement si, » pour signifier une équivalence entre deux propositions.

Attention : Le symbole $\iff$ n'est pas à utiliser n'importe où (méfiez-vous de ce sens $\Leftarrow$). On verra comment l'utiliser pour les systèmes et les équations.

Les ensembles

Définition

Un **ensemble** *E est une collection d'objets. Il y a de nombreuses manière de décrire les objets contenus dans un ensemble :*

- *on peut écrire la liste des objets contenus entre deux accolades* $E = \{\ \ldots\}$
- *on peut décrire E comme les objets vérifiant une propriétés $\mathcal{P}$ qui les caractérise* $E = \{x, x \text{ vérifie } \mathcal{P}\}$.

Exemple:
$E = \{1, -2, 6, 27, a, r\}$ est un ensemble contenant quatre nombres et deux lettres.
$F = \{x \in \mathbb{R}, x^2 > 1\}$ est un ensemble contenant les nombres réels dont le carré est strictement plus grand que 1.

Définition

Si E est un ensemble, on appelle

- **élément** *de E tout objet appartenant à E. Si x est un élément de E, on note $x \in E$ (symbole "appartient à").*
- **partie** *de E (ou* **sous-ensemble** *de E) tout ensemble constitué d'objets de E. On dit qu'il est inclus dans E. Si F est une partie de E, on note $F \subset E$ (symbole "inclus dans").*

Un certain nombre d'ensemble courant ont des notations qu'on retrouve dans quasiment tous les livres de mathématiques :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs,
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels (quotients de deux nombres entiers relatifs),
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.

Ces ensembles sont inclus les uns dans les autres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Un ensemble de la forme $[a, b]$ où a et b sont des nombres est un intervalles. ça signifie tous les réels compris entre les réels a et b. Selon la forme des crochets, les nombres a et b peuvent être inclus ou exclus.

Et la phrase mystère est....

Maintenant, nous avons tous les éléments pour comprendre la phrase du début

$$\forall x \in [0,1], x \geqslant 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$$

$\forall x \in [0,1],$	Pour tout réel x compris entre 0 et 1 (0 et 1 inclus)
$x \geqslant 0$	si x est strictement positif,
$\Rightarrow$	alors
$\exists y \in [0,1],$	il existe un nombre y réel
$y^2 = x$	tel que x soit le carré de y (c'est le nombre $y = \sqrt{x}$).

Ce qu'on peut écrire en français pur : Tout nombre réel compris entre 0 et 1 admet une racine carré.

Un peu de rab sur les ensembles

Définition

On considère E un ensemble. Si A, B sont deux sous-ensembles de E, alors on définit :

- *L'union de A et B, notée $A \cup B$, est la partie de E dont les éléments sont dans A ou B. (ou dans les deux à la fois). On a*

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

- *L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est la partie de E dont les éléments sont à la fois dans A et dans B. On a*

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Définition

Soient A, B deux ensemble. On appelle produit cartésien de A et B l'ensemble $A \times B$ défini par

$$A \times B = \{(x, y), x \in A, y \in B\}.$$

C'est l'ensemble des couples formés avec un élément de A et un de B.

Remarque: Le produit cartésien $A \times A$ se note aussi A^2. Le produit cartésien $A \times A \times A$ se note aussi A^3....

Exemple: $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble de tous les couples (x, y) où x et y sont des réels. On s'en servira pour les coordonnées dans le plan. De même, $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble de tous les triplets (x, y, z) où x, y et z sont des réels. On s'en servira pour les coordonnées dans l'espace.

Soient A, B deux ensembles. On veut montrer que $A = B$. Il y a deux rédactions types :

Méthode 1 (par équivalence). Pour pouvoir utiliser cette méthode, il faut faire très attention à n'utiliser que des équivalences. Sauf dans les cas d'équations simples, elle est difficile à rédiger correctement.

Soit $x \in A$.

$$x \in A \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow x \in B$$

Donc $A = B$.

Méthode 2 (par double inclusion). C'est la méthode la plus utilisée.

1. Soit $x \in A$.
$$x \in A \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x \in B$$
Donc $A \subset B$.
2. Soit $x \in B$.
$$x \in B \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x \in A$$
Donc $B \subset A$.
3. On a $A \subset B$ et $B \subset A$, donc $A = B$

Plan

Dans un raisonnement en français, vous pouvez utiliser les mots et locutions suivantes : donc, car, d'où, or, c'est-à-dire, autrement dit, si ... alors, puisque, comme, par conséquent, etc. Attention toutefois à la signification logique de ces mots (cause, conséquence, équivalence).

Si la réponse à une question nécessite un raisonnement en plusieurs étapes ou de distinguer plusieurs cas, on peut introduire les différentes parties par une phrase du genre ≪Montrons que ...≫, ≪Résolvons l'équation...≫, ≪Nous allons maintenant prouver que≫, etc. Des conclusions marquant la fin de chacune des étapes sont les bienvenues mais ne dispensent pas d'écrire une conclusion finale.

Écrivez français ou mathématique, mais pas les deux à la fois ! Les symboles mathématiques ne peuvent pas être utilisés en tant qu'abréviation. Cependant, le mélange est autorisé pour certaines notations, notamment avec symboles $\in$, $\leqslant$, $\geqslant$, comme dans ≪ Soit $x \in E$ ≫. On n'est pas obligé d'écrire : ≪ Soit x un élément de E ≫. Ce n'est là qu'une question de convention.

Exemple: Montrer que pour tout x réel, on a
$x \in [0;1] \Longrightarrow \sqrt{1-x^2} \in [0;1]$.
Réponse :

- *(Introduction de la variable utilisée dans la démonstration)* .
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
- *(on prend comme point de départ du raisonnement la proposition à l'origine de $\Longrightarrow$)*
  Si $x \in [0;1]$,
- *(on écrit les différentes étapes du raisonnement : calculs, utilisation du cours...)*
  alors on a $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ donc $0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1$ et comme la fonction racine carrée est croissante, $0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1$.
  On a donc $\sqrt{1-x^2} \in [0;1]$. *(fin du raisonnement. Ne pas oublier de conclure.)*
- En conclusion $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, x \in [0;1] \Longrightarrow \sqrt{1-x^2} \in [0;1]}$

Plan

Les clés de la réussite pour cette année, mais surtout pour votre futur cursus en école d'ingénieur sont simples : apprendre son cours, mettre en pratique lors des exercices, et **montrer** qu'on a tout compris en rédigeant bien dans les copies !
Une bonne rédaction dans une copie, pour un concours, pour un partiel en école d'ingénieurs, en DS cette année est indispensable. Les copies mal rédigées, mal présentées et mal écrites sont sanctionnées. Les réponses en mathématiques sont comme les copies de français, on doit y trouver une introduction, un développement organisé avec les connecteurs logique et une conclusion.

Face à une question ou un problème, voici les étapes menant à une résolution correctement rédigée :

1. Lire la question jusqu'au bout, comprendre ce qu'on demande et identifier les notations utilisées . Ne pas recopier la question sur sa copie, ça perd du temps et ça ne sert à rien
2. **Réfléchir** à ce qu'on va utiliser pour répondre : calculs ? théorèmes ? faut-il plusieurs étapes ? un brouillon peut aider à fixer les idées mais ne perdez pas de temps à tout faire au brouillon. Il faut passer au "propre" le plus vite possible.
3. Introduire les variables (lettres : f, x, Δ...) nécessaires.
4. Organiser les calculs, les théorèmes, les raisonnements dans l'ordre, avec des articulations logiques permettant de comprendre le cheminement.
5. Conclure sa réponse par un $\boxed{\text{encadré à la règle et en rouge}}$ mettant en valeur le résultat du calcul ou la proposition à démontrer. Méfiez-vous, certains correcteurs ne comptent pas la réponse si elle n'est pas encadrée, c'est une convention de concours et d'examen.

Remarque: Il est aussi utile de savoir calculer vite et juste. Pour vous entraîner, allez faire un tour sur le site

http ://www.amicollege.com/

Pas la peine de s'inscrire pour s'entraîner dans la catégorie "Contenu mathématique". Je recommande particulièrement les sections **Calculs individuels** (niveau 4ième et 5ième, Littéral et Fraction) et **Equations** (équations de bases et situations évoluées).